Cinemàtica en dues dimensions

En la unitat anterior hem fet la classificació dels moviments en dos grups, els rectilinis i els circulars, i hem acordat considerar qualsevol altra trajectòria com una combinació dels moviments anteriors.
Introduirem aquest nou tema amb una d'aquestes combinacions: *els moviments parabòlics.*

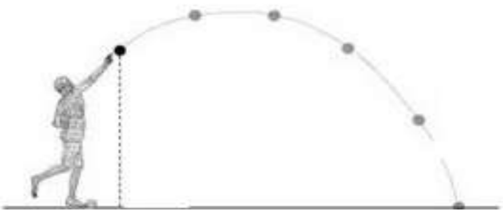
S'anomena **moviment parabòlic** el moviment d'una partícula amb acceleració constant, de manera que aquesta no coincideix amb la direcció de velocitat. És la combinació de dos moviments rectilinis que tenen lloc en direccions perpendiculars: l'eix horitzontal (eix X) descriu un MRU ja que la velocitat v_x és constant i l'eix vertical (eix Y), un MRUA perquè hi actua una acceleració constant . Si questa acceleració és l'acceleració de la gravetat, g, i el moviment té lloc prop de la superfície terrestre, parlarem de **llançament parabòlic**.

Descriurem, ara, els tres tipus de llançaments parabòlics més freqüents detallant les condicions en que es donen:

1. Llançament oblic

CONDICIONS INICIALS

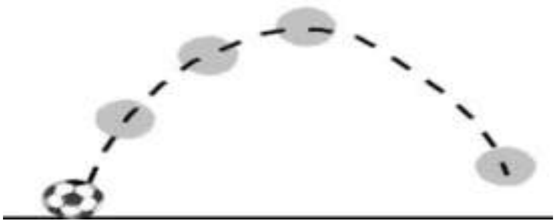
$X_0 = 0m$, $Y_0 \neq 0m$ $a_x = 0 m/s^2$, $a_y = -9'8 m/s^2$ $v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$, $v_y = v_0 \cdot \sin\alpha$



2. Llançament oblic des de terra

CONDICIONS INICIALS

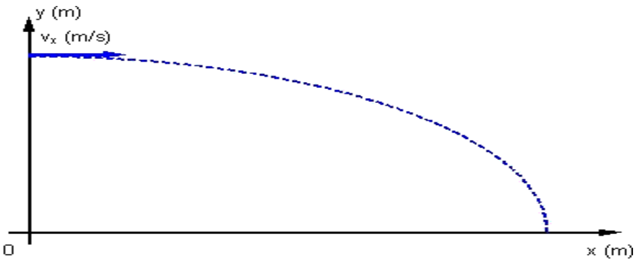
$X_0 = 0m$, $Y_0 = 0m$ $a_x = 0 m/s^2$, $a_y = -9'8 m/s^2$ $v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$, $v_y = v_0 \cdot \sin\alpha$



3. Llançament horitzontal

CONDICIONS INICIALS

$X_0 = 0m$, $Y_0 \neq 0m$ $a_x = 0 m/s^2$, $a_y = -9'8 m/s^2$ $v_x = v_0$, $v_y = 0 m/s$



Hem d'emprar un seguit de tres equacions per arribar a uns paràmetres que ens permetin descriure el moviment correctament:

EQUACIÓ DE MOVIMENT

$$\left.\begin{array}{l} x = (v_0 \cdot \cos\alpha)\, t \\ y = y_0 + (v_0 \cdot \sin\alpha)\, t + \frac{1}{2}\, g \cdot t^2 \end{array}\right\}$$

EQUACIÓ DE VELOCITAT

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_y = (v_0 \cdot \sin\alpha) + g \cdot t \end{array}\right\}$$

EQUACIÓ DE TRAJECTÒRIA

$$y = y_0 + (\operatorname{tg}\alpha)\, x + \left[\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos\alpha^2}\right] x^2$$

Dos dels ***paràmetres*** més destacables són:

- L'abast horitzontal ($X_{màx.}$): distància recorreguda en l'eix X en l'instant en que el cos arriba a terra (Y = 0)

- L'altura màxima: distància màxima recorreguda en direcció Y ($v_y = 0$).

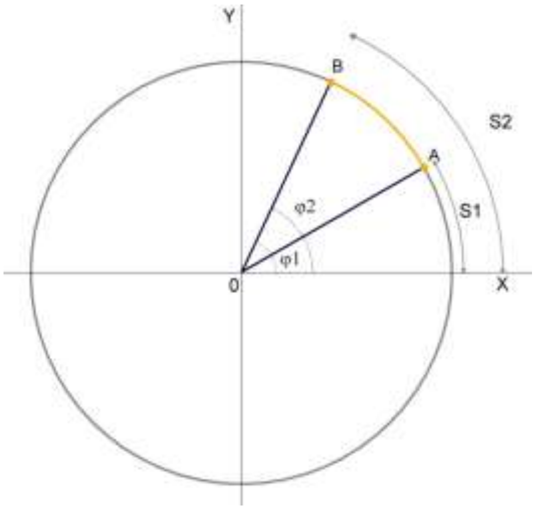
Ja vam estudiar detalladament els moviments rectilinis a la unitat anterior. Ara estudiarem els moviments circulars.

El **moviment circular** és el que té com a trajectòria una circumferència. És un moviment pla, és a dir, en dues dimensions.

Per determinar la posició de la partícula hem de fixar un **sistema de referència**. Agafarem el centre de la circumferència com a origen de coordenades i mesurarem la posició de la partícula en funció dels eixos X i Y.
Els dos valors que determinen la situació de la partícula són el radi *de la circumferència (r)* i *l'angle format* per aquest radi.

Hem de definir noves **magnituds** per entendre aquest moviment:

A. *Desplaçament*



Tenim una partícula inicialment en el punt A que es mou descrivint un moviment circular fins al punt B. Mesurarem el seu desplaçament de dues formes:

1. Com l' *INCREMENT D'ANGLE GIRAT* $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Aquest increment es mesura en radiants. Sabem que:

[1 rad = arc de longitud r = 2π rad = 360º = 1volta]

2. Com l' *ESPAI RECOREGUT* $\Delta S = S_2 - S_1$, que coincideix amb l'arc de circumferència (s).

B. *Velocitat*

També podem mesurar la velocitat de sues maneres:

1. Com l' *INCREMENT D'ANGLE GIRAT (en passar la partícula del punt A al punt B) DIVIDIT PEL TEMPS QUE TARDA EN DESCRIURE'L* [**Velocitat angular mitjana**]

$$W_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Si considerem intervals de temps cada vegada més petits, els angles descrits seran també cada vegada més petits. Definirem questa velocitat com el límit de la velocitat angular mitjana quan el temps tendeix a 0 [**velocitat angular instantània**]:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega m = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi / \Delta t$$

2. Com *INCREMENT D'ARC RECORREGUT (en passar la partícula del punt A al punt B) DIVIDIT PEL TEMPS QUE TARDA EN DESCRIURE'L* [**Velocitat lineal mitjana**]

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

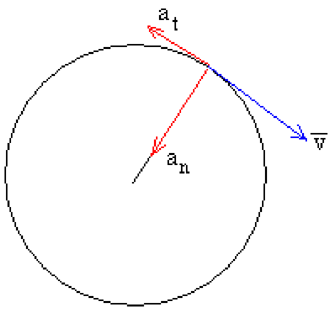
Si considerem intervals de temps cada vegada més petits, els arcs recorreguts seran també cada vegada més petits. Definirem questa velocitat com el límit de la velocitat lineal mitjana quan el temps tendeix a 0 [**velocitat lineal instantània**]:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} Vm = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta S / \Delta t$$

C. *Acceleració*

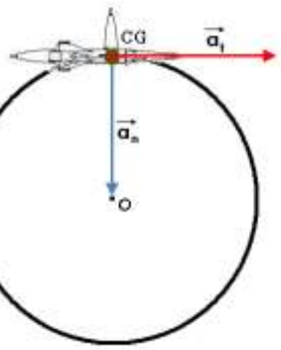
En aquests moviments podem definir tres acceleracions:

1. **Acceleració tangencial**: quan v és tangent a la trajectòria.



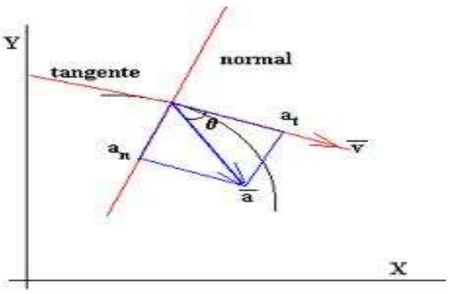
$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

2. **Acceleració normal o centrípeta**: és perpendicular a la direcció de la velocitat i el seu sentit va dirigit al centre de la circumferència.



$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

3. **Acceleració total** = arrel quadrada de la suma de les velocitats tangencial i normal al quadrat.



$$a = \sqrt{(an)^2 + (at)^2}$$

4. **Acceleració angular**

(a) ***Acceleració angular mitjana*** = increment de velocitat angular instantània entre l 'interval de temps determinat.

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

(b) ***Acceleració angular instantània*** = límit de l'acceleració angular mitjana quan l' interval de tems tendeix a 0.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \alpha m = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\omega / \Delta t$$

Moviment circular uniforme (MCU)

Direm que una partícula està en **moviment circular uniforme** si descriu arcs i angles iguals en intervals de temps iguals.

A l'hora de fer problemes hem de tenir en compte les condicions inicials que determinen aquest moviment :

$\boldsymbol{\omega}$ (constant) — **a** $_n$ (constant)

v: *Mòdul* (constant) / *Direcció* (variable) — **a** $_t$ = 0

Per estudiar-lo, haurem de saber les equacions que ens ajudaran a descriure'l:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}} \longrightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega\,(\Delta t)}$$

Equació de velocitat angular.

Equació que relaciona l'angle girat i el temps.

.

$[\, v = \omega \;\; x \;\; r \,]$

Equació que relaciona la velocitat angular i la velocitat lineal.

$[\, S = \varphi \;.\; r \,]$

Equació que relaciona l'arc recorregut amb l'angle girat .

$$\boxed{v = \frac{\Delta S}{\Delta t}} \longrightarrow \boxed{S = S_0 + v\,(\Delta t)}$$

Equació de velocitat lineal.

Equació que relaciona l'arc recorregut i el temps.

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \;.\; r}$$

Expressió que permet trobar l'acceleració normal.

Manca esmentar nous conceptes , relacionats amb la velocitat angular:

- **Període** (T): temps que tarda una partícula en donar una volta completa a la circumferència que descriu. Es mesura en segons (s) en el SI.

Si la partícula ha descrit una volta, aleshores: $\Delta\varphi = 2\pi$ rad i $\Delta t = T$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T} = 2\pi ʃ}$$

- **Freqüència** (ʃ): nombre de voltes que fa la partícula en un segon. Es mesura en s^{-1} en el SI, unitat que es denomina Hz (hertz).

$$ʃ = \frac{1}{T}$$

Moviment circular uniformement accelerat (MCUA)

Direm que una partícula està en **moviment circular uniformement accelerat** si descriu una trajectòria circular amb acceleració angular constant.

A l'hora de fer problemes hem de tenir en compte les condicions inicials que determinen aquest moviment :

$\boldsymbol{\omega}$ (variable)	$\mathbf{a}_n$ (constant)
v — *Mòdul* (variable)	$\mathbf{a}_t$ (constant)
v — *Direcció* (variable)	$\boldsymbol{\alpha}$ (constant)

Per estudiar-lo, haurem de saber les equacions que ens ajudaran a descriure'l:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 (\Delta t) + \tfrac{1}{2}\ \alpha (\Delta t)^2}$$

Equació de moviment en funció de l'arc descrit.

$[S = \varphi \ . \ r]$

Equació que relaciona la longitud d'arc recorreguda i l'arc descrit

$$\boxed{S = S_0 + V_0 (\Delta t) + \tfrac{1}{2}\ a_t \ (\Delta t)^2}$$

Equació de moviment en funció de la longitud d'arc recorreguda.

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}} \longrightarrow \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha (\Delta t)}$$

Equació de l'acceleració angular.

Equació de velocitat angular del MCUA.

$[a_t = \alpha \ . \ r]$

Equació que relaciona l'acceleració angular i la tangencial.

$[v = \omega \ . \ r]$

Equació que relaciona la velocitat lineal i l'angular.

$$\boxed{a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \longrightarrow \boxed{v = v_0 + a_t \ (\Delta t)}$$

Equació de l'acceleració tangencial.

Equació de velocitat lineal del MCUA.

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \ . \ r}$$

Equació de l'acceleració normal.

$$\boxed{a = \sqrt{(an)^2 + (at)^2}}$$

Equació de l'acceleració total.