CAMP GRAVITATORI

Direm que a una regió de l'espai existeix un **camp creat per una magnitud física** si es possible assignar en cada instant un valor a aquesta magnitud física per a tots els punts d'aquesta regió.

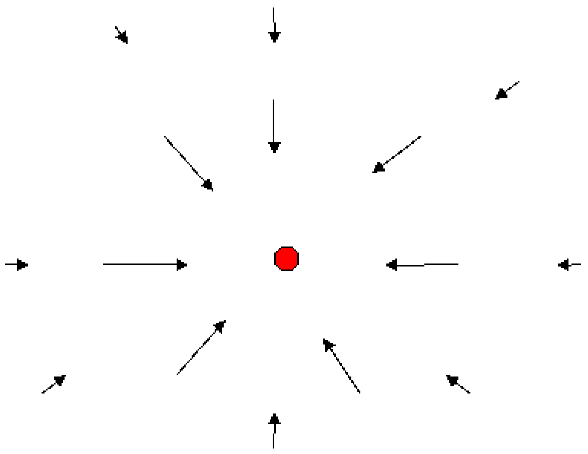
Ex.

Si tenim un got que conté aigua amb gel, on no s'ha arribat a l'equilibri tèrmic, hi mesurem la temperatura a cada punt, aquesta tindrà un valor diferent a cada punt. Existeix, doncs, un camp de temperatura.

Si *la magnitud que defineix el camp és escalar*, tindrem un **camp escalar** i, *si és vectorial*, en tindrem un de vectorial (**camp vectorial**).

Ens interessem especialment en aquest segon curs de batxillerat en camps vectorials, i en concret en l'elèctric i el ***gravitatori***.

Tota massa esdevindrà el punt en el que es dirigeixin les forces que actuïn sobre ella. Si només hi ha una massa, totes aquestes forces aniran dirigides cap a un punt determinat (**centre de forces**), fet pel qual passaran a ésser conegudes com **forces centrals**. Vegem-ho:



Aquesta imatge ens permet definir un nou concepte: la ***intensitat de camp***. Com que ens centrarem en el camp gravitatori, expressarem matemàticament la intensitat de camp com:

EN MÒDUL

$$|\vec{g}| = \frac{|\vec{F}|}{m}$$

EN VECTOR

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

On m és la massa de la partícula sobre la quan actua un força determinada $\vec{F}$.

És indispensable parlar de la llei de la gravitació universal i del recorregut històric d'altres personatges importants al món de la física que propiciaren la formulació d'aquesta llei cabdal.

→ *Claudi Ptolemeu* (100 d.C - 170 d.C) és considerat l'astronom més important de l'antiguitat. Adaptant el model d'Aristòtil (la Terra és el centre de l'Univers i, per tant, tots els astres i cossos que integrin aquesta realitat giraran al seu voltant), va acceptar que el Sol i la Lluna giraven al seu voltant seguint una trajectòria circular però que altres astres, d'una banda giraven en petits cercles (epicicles) i de l'altra, al voltant de la Terra.

→ *Nicolau Copèrnic* (1.473 - 1.543) enderrocà la teoria geocèntrica (la Terra és el centre de tot) i proposà un **model heliocèntric** segons el qual el Sól es trovava al centre del sistema solar i els planetes giraven al seu voltant. D'aquesta manera va poder estudiar el moviment dels planetes amb una bona aproximació.

→ *Tycho Brahe* (1.546 - 1.601) fou un astrònom que es dedicà a la observació dels moviments planetaris durant 20 anys i elaborà una base de dades que va fer molt de servei al seu deixeble: Kepler.

→ *Johannes Kepler* (1.571 - 1.630) és la persona que, gràcies a l'estudi de les dades recopilades per Tycho Brahe, va proposar el conjunt de tres lleis gràcies a les quals Newton dedueix la llei de la gravitació universal.

- ***Primera llei***: els planetes giren en òrbites elíptiques en les quals el Sol ocupa un dels focus.
- ***Segona llei*:** el radi vector que uneix un planeta amb el Sol definexi àries iguals en temps iguals. Així doncs, les àries amb més perímetre es recorreran amb una velocitat major.
- ***Tercera llei***: el quadrat del període del moviment al voltant del Sol de qualsevol planeta és directament proporcional al cub de la distància mitjana que hi hagi fins al Sol.

$T^2 = K \cdot r^3$, on:

T = període de rotació del planeta (temps que triga aquest planeta en donar una volta sencera al voltant del cos central (el Sol) seguint el recorregut que marca la seva òrbita.

K = constant que depèn de cada sistema.

r = radi mitjà de la òrbita.

→ *Isaac Newton* (1.642 - 1.727) és el científic que va deduïr, a partir de les lleis empíriques que acabaem d'exposar, la ***llei de la gravitació universal***, que diu el següent:

La força d'atracció entre dues partícules de masses m_1 i m_2 separades a una distància r és diractament proporcional al producte de les masses i inversament proporcional al quadrat de la distància que les separa. Matemàticament:

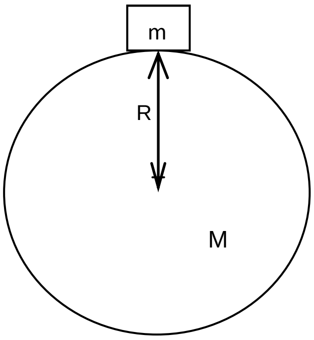
EN MÒDUL

$$|\vec{F}| = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

VECTORIALMENT

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{u}$$

A partir d'aquestes dues fórmules que podem deduïr una forma nova d'expressar-ne dues primeres que hem vist:



Tenim que:

$$|\vec{F}| = G \frac{m \cdot M}{R^2}$$

I que:

$$|\vec{g}| = \frac{|\vec{F}|}{m}$$

Així doncs:

$$|\vec{g}| = \frac{|\vec{F}|}{m} = \frac{G \frac{m \cdot M}{R^2}}{m} = G \frac{M}{R^2}$$

També tenim que:

$$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{R^2} \vec{u}$$

I que:

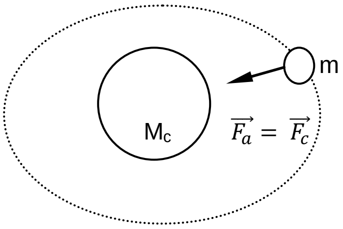
$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Així doncs:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-G \frac{m \cdot M}{R^2} \vec{u}}{m} = -G \frac{M}{R^2} \vec{u}$$

Aplicant la definició de camp físic al cas de la força gravitatòria hem robat, doncs, una nova forma d'expressar, en mòdul i vector, la intensitat de camp gravitatòri.

Imaginem, ara, que tenim una partícula de massa que gira al voltant d'una altra tal i com podem veure al dibuix següent:



Sabem que:

$\vec{F_a} = G\,\frac{M_c\,.\,m}{r^2}$ i $\vec{F_c} = m\,.\,a_c$

I que:

$\vec{F_a} = \vec{F_c}$

Així doncs:

$$G\,\frac{M_c\,.\,m}{r^2} = m\,.\,a_c \rightarrow G\,\frac{M_c\,.\,m}{r^2} = m\,.\,\frac{v^2}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(G\,\frac{M_c}{r}\right)\cdot r = \frac{v^2}{r}\cdot r \rightarrow \mathbf{G\,\frac{M_c}{r} = v^2}$$

FÓRMULES A CONEIXER

$\mathbf{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r}$

$\mathbf{v = \omega \cdot r}$ **;**

$\mathbf{\omega = \frac{2\,\pi}{T}}$

Aquesta última forma els permet desenvolupar dos procesos, cadascun dels quals ens portaran a la deducció d'una fórmula nova:

1. *Obtenció de la fórmula que ens permetrà calcular la velocitat lineal d'un cos que està en òrbita:*

$$G\,\frac{M_c}{r} = v^2 \rightarrow v = \sqrt{G\,\frac{M_c}{r}}$$

2. *Obtenció de la fórmula que ens permetrà calcular la velocitat angular d'un cos que està en òrbita:*

$$v^2 = G\,\frac{M_c}{r} \rightarrow (\omega\,.\,r)^2 = G\,\frac{M_c}{r} \rightarrow \omega^2\,.\,r^2 = G\,\frac{M_c}{r} \rightarrow \omega^2 = G\,\frac{M_c}{r^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{G\,\frac{M_c}{r^3}}$$

Per què no trobem ara el valor de la K de la fòrmula matemàtica que defineix Kepler a la seva segona llei ($T^2 = K\,.\,r^3$) emprant les fòrmules que tot just hem esbrinat?

Sabem que el període de rotació d'un cos que es mou en moviment circular és:

$T = \frac{2\,\pi}{\omega}$, d'on $\omega = \frac{2\,\pi}{T}$

Així doncs:

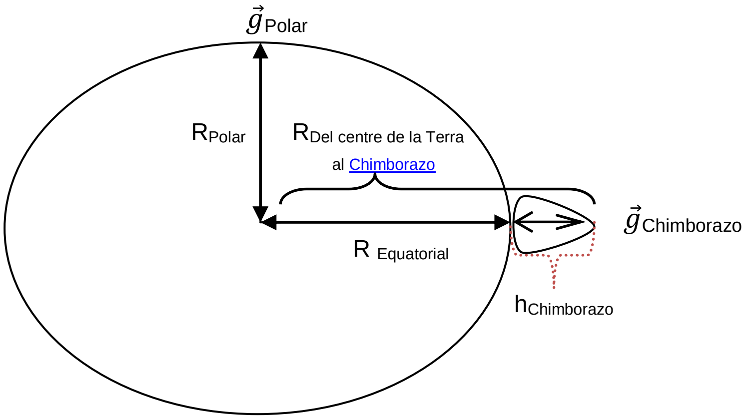
$$v^2 = G\,\frac{M_c}{r} \rightarrow (\omega\,.\,r)^2 = G\,\frac{M_c}{r} \rightarrow \omega^2\,.\,r^2 = G\,\frac{M_c}{r} \rightarrow \left(\frac{2\,\pi}{T}\right)^2 .\,r^2 = G\,\frac{M_c}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow G\,.\,M_c = \frac{4\,\pi^2}{T^2}\,.\,r^3 \rightarrow G\,.\,M_c\,.\,T^2 = 4\,.\,\pi^2.\,r^3 \rightarrow T^2 = \underbrace{\frac{4\,.\,\pi^2}{G\,.\,M_c}}_{K}\,.\,r^3$$

$$K = \frac{4\,.\,\pi^2}{G\,.\,M_c}$$

La $|\vec{g}|$ és igual a tots els punts de la superfície terrestre o no ?

Sabem de sobres que la Terra no té la forma d'esfera perfecta sinó que està estirada per l'equador. Exagerant-ho molt, tindriem quelcom així:



Disposem de les següents **DADES*:***

R_{Polar} = 6.356.800m

$R_{Del\ centre\ de\ la\ Terra\ fins\ el\ Chimborazo}$ = 6.384.400m

m_{Terra} = 5'9736 . 10 ^{24} kg.

La ***força centrífuga*** és, segons molts físics, una força fictícia perquè només és percebuda per aquells que es troben dins d'un sistema inercial. Això ens dóna peu a parlar del tipus de sistemes:

- *Sistema inercial*: sistema que o bé està quiet o bé en MRU. En aquest sistema s'acompleixen les lleis de Newton.

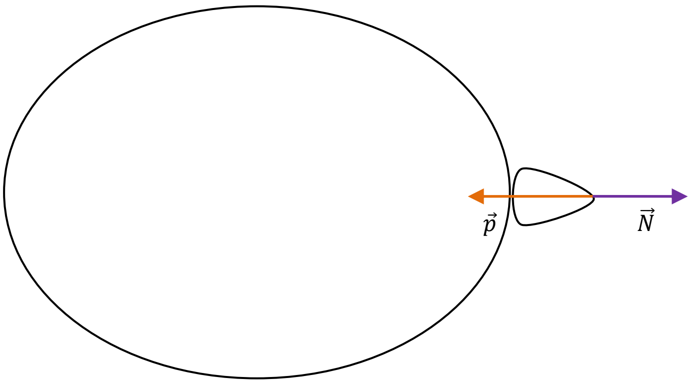
- *Sistema no inercial*: sistema que es troba en un moviment accelerat i al qual no és aconsellable aplicar les lleis de Newton.

Si no tenim en compte el moviment de rotació de la Terra, calcularem els mòduls de les intensitats de camp gravitatori de la forma següent:

$$|\vec{g}_{Polar}| = G\ \frac{m_T}{Rp^{\,2}} = 6'67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/_{kg^2} \cdot \frac{5'97636 \cdot 10^{24}\ kg}{(6.356.800m)^2} = 9'86\ N/kg = 9'86\ m/s^2$$

$$|\vec{g}_{Chimborazo}| = G\ \frac{m_T}{Rch^{\,2}} = 6'67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/_{kg^2} \cdot \frac{5'97636 \cdot 10^{24}\ kg}{(6.384.400m)^2} = 9'7751\ N/kg = 9'7751\ m/s^2$$

Ja d'entrada veiem que hi ha una mínima però existent variació d'intensitat de camp gravitatòri entre un indret i un altre. Això no obstant, els resultats obtinguts amb les operacions anteriors no són genys acurats. Hem de tenir en compte que la Terra està en moviment i que, per tant, hi actua una acceleració centrípeta. Haurem de fer, doncs, certes modificacions en la gravetat a dalt del Chamborazo. Ja que els pols estàn a l'eix de rotació de la Terra, no actua sobre ells l'acceleració centrípeta.



Tenim que:

$\sum\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$\vec{p} - \vec{N} = m \cdot \vec{a}_c$

$m \cdot |\vec{g}_0| - m \cdot |\vec{g}_a| = m \cdot \vec{a}_c$

$|\vec{g}_0| - |\vec{g}_a| = \vec{a}_c$

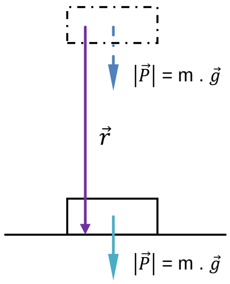
Gravetat sense rotació

Gravetat aparent (amb rotació)

$$|\vec{g}_a| = |\vec{g}_0| - \vec{a}_c = |\vec{g}_0| - \omega^2 \cdot R = 9'7751\ N/kg - (7'27 \cdot 10^{-5}\ \tfrac{rad}{s})^2 \cdot 6.384.400m = \mathbf{9'74\ N/Kg}$$

Parlarem ara del ***treball i l'energia potencial dels cossos:***

PER A COSOS PROPERS A LA SUPERFÍCIE DE L PLANETA



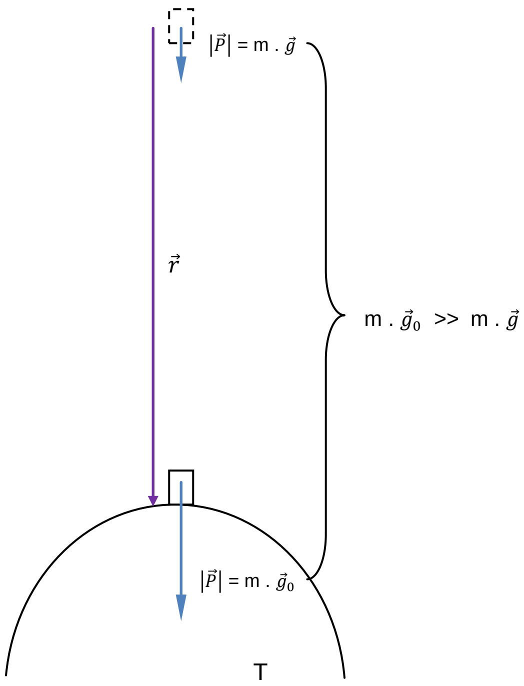
$W_{\text{Sistema}} = \vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos\alpha = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos 0^{\circ} =$

$= |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot 1 = m \cdot \vec{g}\ (h_0 - h) =$

$= m \cdot \vec{g} \cdot h_0 - m \cdot \vec{g} \cdot h = -\ (m \cdot \vec{g} \cdot h_0 + m \cdot \vec{g} \cdot h) = -\Delta E_p$

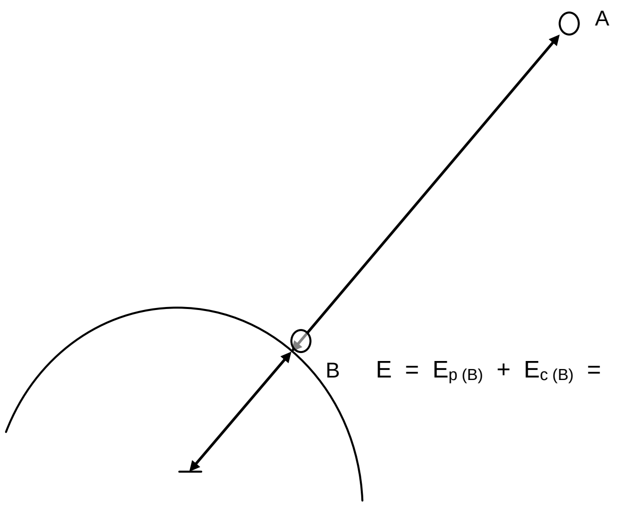
$W_{\text{Forces exteriors}} = \Delta E_p$

PER A COSOS MOLT LLUNYANS A LA SUPERFÍCIE DE L PLANETA



$E_p \neq m \cdot \vec{g} \cdot h$ perquè $\vec{g}$ no és constant

$W_{\text{Sistema}} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\,G\ \dfrac{M_T \cdot m_{cos}}{r} = \Delta E_p$



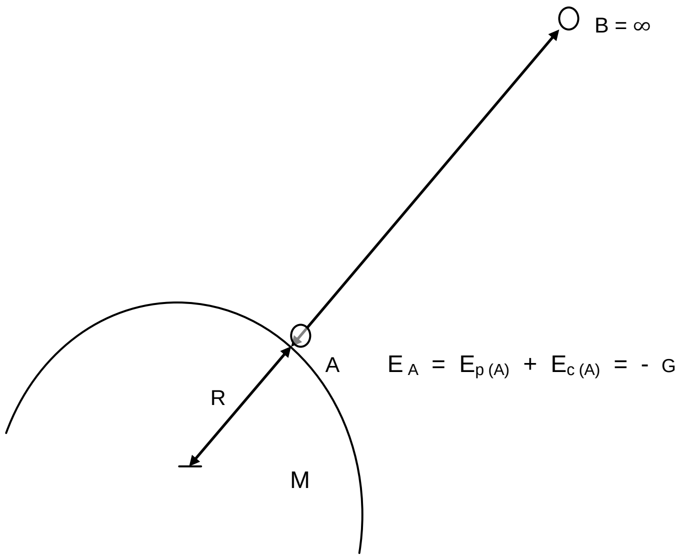
$E = E_{p\,(A)} + E_{c\,(A)} = E_{p\,(A)} = -\,G\ \dfrac{M_T \cdot m_A}{R_T + h}$

Quan un cos marxa del camp gravitatori del planeta al qual es troben es diu que r és infinit i, per tant, l'energia potencial és 0:

$\mathbf{E_p} = G\,\dfrac{M_T \cdot m}{r} = G\,\dfrac{M_T \cdot m}{\infty} = G \cdot 0 = \mathbf{0}$

$E = E_{p\,(B)} + E_{c\,(B)} = -\,G\ \dfrac{M_T \cdot m_B}{R_T} + {}^{1}/_{2} \cdot m \cdot v^2$

La ***velocitat d'escapament*** , que és és la velocitat mínima que es necessita per poder escapar de l'atracció del camp gravitatori generat per un objecte qualsevol, en lloc de caure-hi a sobre una altra vegada o entrar en òrbita a una alçada concreta sobre la seva superfície, és quelcom necessàri de saber calcular a aquest segon any de batxillerat:



$E_B = E_{p\,(B)} + E_{c\,(B)} = 0$

$E_A = E_{p\,(A)} + E_{c\,(A)} = -\,G\,\frac{M\,.\,m}{R} + {}^{1}\!/_{2}\,.\,m\,.\,v^2$

$E_A = E_B$

$-\,G\,\frac{M\,.\,m}{R} + {}^{1}\!/_{2}\,.\,m\,.\,v^2 = 0$

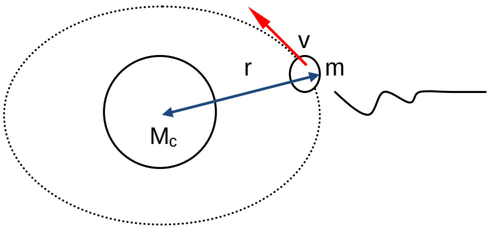
${}^{1}\!/_{2}\,.\,\cancel{m}\,.\,v^2 = -\,G\,\frac{M\,.\,\cancel{m}}{R}$

${}^{1}\!/_{2}\,.\,v^2 = G\,\frac{M}{R}$

$v^2 = G\,\frac{M}{R}\,.\,2$

$v = \sqrt{G\,\frac{M}{R}\,.\,2}$

Escau tenir coneixements sobre cóm ***calcular l'energia mecànica de partícules de massa que estàn en órbita***. Suposem el cas següent:



$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 - G\,\frac{Mm}{r}$

Aquesta E depen de la velocitat a la que es mou el cos, el radi de la òrbita i la massadela massa central.

Ja hem deduit que la velocitat a la que es mou un objecte en òrbita és $V^2 = \frac{GM}{r}$

Podem substituir això a la fòrmula d'energia mecànica d'un objecte que està en òrbita:

$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\cdot v^2 - G\,\frac{M\cdot m}{r} = \frac{1}{2}m\cdot v^2 = m\cdot v^2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = m\cdot v^2\left(-\,\frac{1}{2}\right) = -\,\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$

Podem fer substitucóns d'una altra forma tenint en compte la fórmula de velociat de la qual ja hem parlat $\left(v^2 = \frac{GN}{r}\right)$:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G\,\frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2}\, m\,\frac{G \cdot M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \frac{G \cdot M \cdot m}{r} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Ja hem trobat, doncs, ***tres maneres diferents de calcular l'energia mecànica d'un objecte que està en òrbita***:

$\rightarrow$ $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G\,\frac{M \cdot m}{r}$

$\rightarrow$ $E = -\frac{1}{2} m \cdot v^2$

$\rightarrow$ $E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$

Manca tenir coneixement sobre la ***traducció dels resultats*** de les operacións que puguen arribar a fer.

Sistema lligat → $E < 0$ → Objecte que segueix una òbita el·líptica.

Sistema "mig lligat" → $E = 0$ → Objecte que fa una trayectòria parabòlica.

Sistema deslligat → $E > 0$ → Objecte la trayectòria del qual és una hipèrbola.