CÀLCUL VECTORIAL

Abans de començar a parlar de vectors i ficar-nos plenament en el seu estudi, hem de saber distingir els dos ***tipus de magnituds*** que defineixen la física:

1. **Magnituds escalars**: magnituds que queden completament definides per un nombre i una unitat de mesura.

Ex.

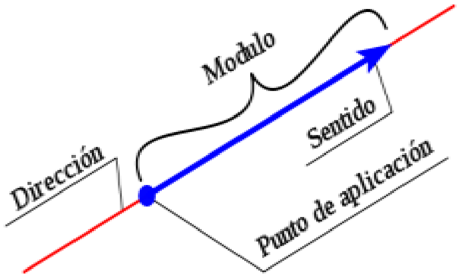
Massa, temps, longitud . . .

2. **Magnituds vectorials**: magnituds que no queden completament definides per un nombre i una unitat de mesura, sinó que necessiten d'un vector que les acabi de definir completament.

Ex.

Desplaçament, velocitat, acceleració, força i moviment lineal.

Un cop explicats aquests dos termes, començarem la introducció a ***què és un vector*** :



Un vector és, com podem observar a la imatge de l'esquerra, un segment orientat que s'estructura en diverses parts:

A. *Origen o punt d'aplicació.*

B. *Mòdul o intensitat:* valor numèric, de signe positiu, proporcional a la llargada del vector.

C. *Direcció* (horitzontal o vertical).

D. *Sentit* (dreta o esquerra).

Es important dir que, dos vectors, des del punt de vista matemàtic, són iguals quan els seus mòduls, sentits i direccions són equivalents.

A l'hora de representar per escrit, sigui a mà o amb ordinador, les magnitud vectorials o els propis vectors s'han d'aprendre cinc cèntims de **simbologia matemàtica**:

$\vec{A}$ = A és una magnitud vectorial.

$|\vec{A}|$ = igualaré aquesta expressió al mòdul de la magnitud vectorial.

A = A és una magnitud vectorial (a l'hora d'escriure a ordinador).

Hi ha formes i formes d'expressar els valors d'un vector. Algunes són correctes i d'altres tenen incorreccions. Tot seguit en veurem les principals errades que es cometen a aquest nivell de dificultat, tot i que també veurem com alguns dels exemples són correctes:

1 . $|\vec{F}|$ = 10N CORRECTE

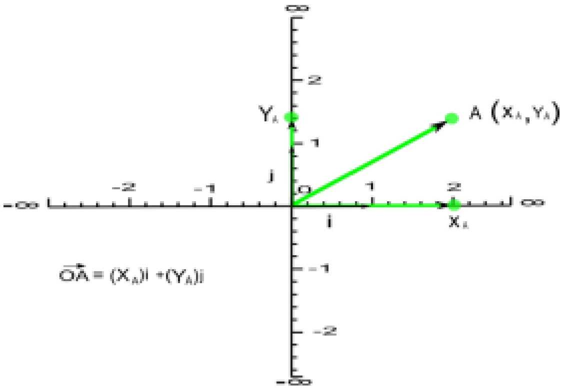
2. $\vec{F}$ = 10N INCORRECTE (Si F és un vector el resultat ens ha d'aportar informació sobre la seva direcció i el seu sentit).

3. $|\vec{F}|$ = - 10N INCORRECTE (El mòdul d'un vector mai pot ser negatiu)

4. $|\vec{F}|$ = $10_{30º}$ N INCORRECTE (Aquest resultat no és pas el d'un mòdul, de manera que $|\vec{F}|$ s'hauria d'escriure com $\vec{F}$).

Començarem, en no res, a treballar les operacions amb vectors però abans que res haurem de treballar els ***mètode de projectar un vector*** :

1. **Components cartesians**: projecció del vector sobre els eixos de coordenades.

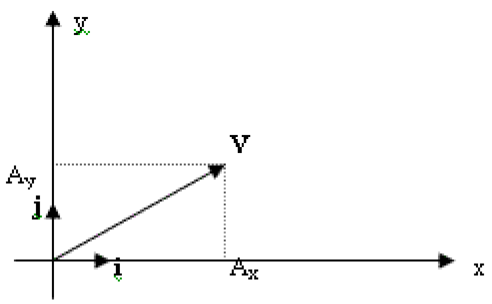


2. **Coordinades polars**: projecció dels vectors fora del pla, representant-los amb el mòdul i l'argument (angle que formen amb l'horitzontal o la vertical de la forma A_α

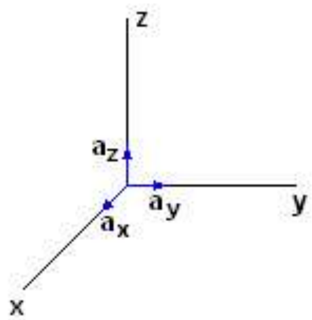
Ex.

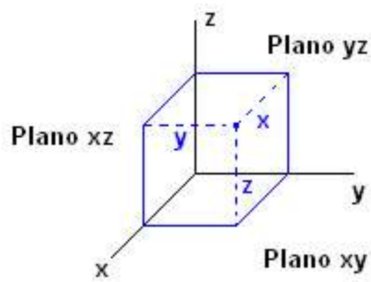
$A_{45º}$

3. **Per mitjà de VECTORS UNITARIS**: consisteix en la projecció dels vectors per mitjà d'una notació especial i característica d'aquests segments orientats a l'espai:



En dues dimensions





En tres dimensions

IMPORTANT!!

Donat el vector $\vec{a} = n\,\vec{i} + m\,\vec{j}$, podem especificar el seu vector unitari associat seguint la fórmula que aprico, prenet el vector anterior com a model, tot seguit:

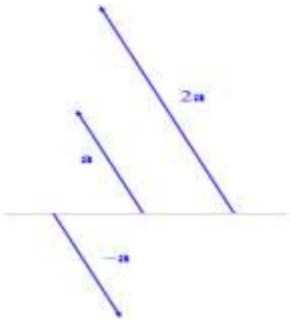
$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}\,|} = \frac{n\,\vec{i} + m\,\vec{j}}{|\vec{a}\,|}$$

Ara sí: ja podem compençar amb les **operacions amb vectors**:

1. **Producte d'un vector per un escalar** : ESCALAR (número) x VECTOR = VECTOR

Ex.

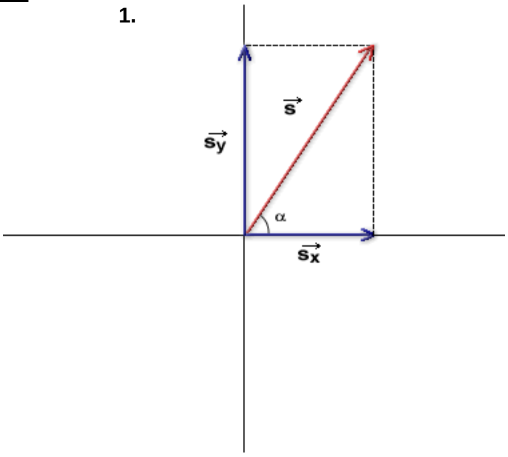
2 x A = 2A



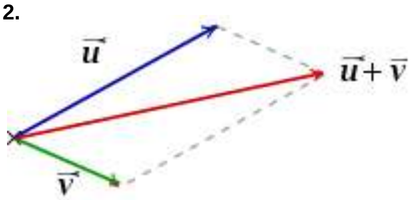
2. **Suma de vectors**: $\vec{A} + \vec{B} = \overline{A + B}$

Ex.

1.



2.



TEOREMA DEL COSINUS

$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = u^2 + v^2 + 2\,.\,u\,.\,v\,.\,\cos\alpha$

Exemple amb números:

Si $\vec{u} = 14$, $\vec{v} = 10$ i $\alpha = 45º$

↓

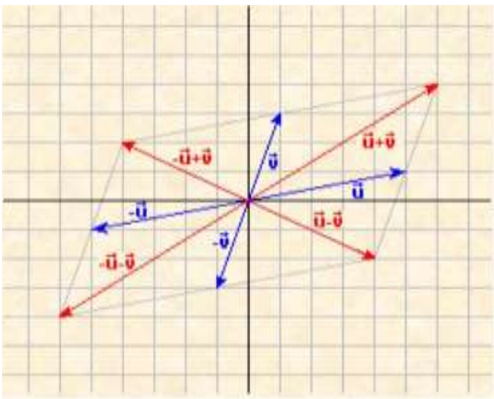
$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = u^2 + v^2 + 2\,.\,u\,.\,v\,.\,\cos\alpha$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{u^2 + v^2 + 2\,.\,u\,.\,v\,.\,\cos\alpha}$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{14^2 + 10^2 + 2\,.\,14\,.\,10\,.\,\cos 45º}$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{100 + 196 + 280\,.\cos 45º}$ = 22'86

3. **Diferència o resta de vectors**: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$



Per sumar i restar vectors es segueix, moltes vegades, ***el*** mateix ***proces***:

$\vec{A} = A_x\,\vec{\imath} + A_y\,\vec{\jmath} + A_z\,\vec{k}$

$\vec{B} = B_x\,\vec{\imath} + B_y\,\vec{\imath} + B_z\,\vec{k}$

$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\,\vec{\imath} + (A_y + B_y)\,\vec{\jmath} + (A_z + B_z)\,\vec{k}$

Ex:

$\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

$\vec{B} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

$\vec{A} + \vec{B} = (2 + 3)\,\vec{\imath} + (3 + 4)\,\vec{\jmath} = 5\vec{\imath} + 7\vec{\jmath}$.

No és el mateix sumar o restar vectors que mòduls. Per sumar o restar el mòdul només hem de sumar o restar el valor numèric de cadascun dels seus vectors independentment de les seves direccions i sentits.

Ex.

Si $|\vec{A}| = 10$ i $|\vec{B}| = 5$

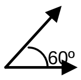
$|\vec{A}| + |\vec{B}| = 10 + 5 = 15$

$|\vec{A}| - |\vec{B}| = 10 - 5 = 5$

4. **Preocucte escalar**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

Ex:

$|\vec{a}| = 5$



$|\vec{b}| = 2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = 5 \cdot 2 \cdot \cos 60º = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$

A l'hora de fer el producte escalar de dos o més vectors es segueix un mateix preocès. Abans d'explicar-ho, però, hem de treballar el **producte escalar dels vectors unitaris:**

$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90º = 1 \cdot 0 = 0$

$\vec{i} \cdot \vec{k} = |\vec{i}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90º = 1 \cdot 0 = 0$

$\vec{j} \cdot \vec{k} = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90º = 1 \cdot 0 = 0$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0º = 1 \,.\, 1 \,.\, 1 = 1$

$\vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0º = 1 \,.\, 1 \,.\, 1 = 1$

$\vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0º = 1 \,.\, 1 \,.\, 1 = 1$

Així doncs, donats els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= \mathbf{a_x \cdot b_x \cdot \vec{i} \cdot \vec{i}} + a_x \cdot b_y \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x \cdot b_z \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y \cdot b_x \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + \mathbf{a_y \cdot b_y \cdot \vec{j} \cdot \vec{j}} +$$
$$+ a_y \cdot b_z \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_y \cdot \vec{k} \cdot \vec{j} + \mathbf{a_z \cdot b_z \cdot \vec{k} \cdot \vec{k}} =$$

$$= \mathbf{a_x \cdot b_x \cdot 1} + a_x \cdot b_y \cdot 0 + a_x \cdot b_z \cdot 0 + a_y \cdot b_x \cdot 0 + \mathbf{a_y \cdot b_y \cdot 1} + a_y \cdot b_z \cdot 0 +$$
$$+ a_z \cdot b_x \cdot 0 + a_z \cdot b_y \cdot 0 + \mathbf{a_z \cdot b_z \cdot 1} =$$

$$= \mathbf{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z} = \text{NÚMERO}$$

$\Downarrow$

Ens pot dónar informació sobre **l'angle que formen els vectors** aïllant elements de la primera fórmula:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

5. **Preocucte vectorial**: $\vec{A}\ .\ \vec{B}\ =\ VECTOR$

$\Downarrow$

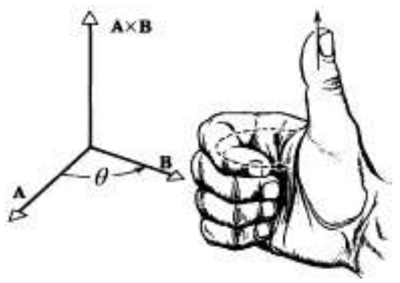
1. ***Mòdul*** *:* $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\alpha$

2. ***Direcció****:* perpendicular al pla que determinen els dos vectors.

x *:* el vector entra. **o***:* el vector surt.

3. ***Sentit****:* donat per la regla de la mà dreta o la regla del cargol.

En la regla de la mà dreta el dit índex apunta en la direcció del vector A i el pulgar, en la direcció del B. La direcció del vector resultant s'obté de la direcció del dit pulgar quan es tanca l'índex. Si el dit pulgar apunta cap a dalt, la direcció és postiva.Si apunta cap a baix la direcció serà, doncs, negativa.



Per calcular el vector resultant del producte vectorial farem servir la coneguca con a **Regla de Sarrus**:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{matrix} \imath & \jmath & z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}$$

1r (+)

2n (-)

Així doncs:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x . b_z . \vec{\imath} + a_z . b_x . \vec{\jmath} + a_x . b_y . \vec{k} - [\, a_y . b_x . \vec{k} + a_x . b_z . \vec{\jmath} + a_z . b_y . \vec{\imath}\,]$$